

XX Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

Задачи для 10 класса

Задача 1

На клавиатуре мобильного телефона каждой кнопке сопоставлено по несколько букв: кнопке 2 соответствуют буквы **ABC**, 3 – **DEF**, 4 – **GHI**, 5 – **JKL**, 6 – **MNO**, 7 – **PQRS**, 8 – **TUV**, 9 – **WXYZ**. Выбор нужной буквы определяется числом нажатий на кнопку. Например, нажав на кнопку 4 один раз, получим букву **G**, а два нажатия на кнопку 4 дадут или букву **H** (если нажимать быстро) или две буквы **G** (если нажимать с паузой). Известно, что при наборе пароля из 10 букв были нажаты последовательно кнопки 777255899999. Определите число возможных вариантов паролей.

Задача 2

Для открытия подземелья в волшебной стране надо правильно назвать три целых числа a, b, c , служащих коэффициентами квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Представителям четырёх рас были переданы следующие значения функции: троллям – значение $f(21)$, эльфам – $f(24)$, гномам – $f(25)$, оркам – $f(28)$. Когда представители рас встретились, чтобы совместно найти a, b, c и открыть подземелье, один из представителей, чтобы сорвать мероприятие, предъявил неверное значение. Выясните, кто это был, если известно, что тролли предъявили число 273, эльфы – 357, гномы – 391, орки – 497.

Задача 3

В концах диаметра окружности расположены числа 1 и 5, разбивающие окружность на две дуги. Совершим по окружности n оборотов по часовой стрелке, приняв за начало обхода один из концов диаметра. После прохождения каждой имеющейся на данный момент дуги делим её пополам и в середине записываем число $\frac{3x+3y}{2}$, где x и y – числа, стоящие на концах пройденной дуги, взятые в порядке направления обхода. Найдите сумму всех записанных чисел после n оборотов.

Задача 4

Для зашифрования натурального числа t используется граф, представляющий собой множество вершин, некоторые из которых соединены друг с другом прямой линией. Вершины графа, соединенные друг с другом, называют *соседними*. Зашифрование состоит в выполнении следующих действий. В вершины графа записываются натуральные числа так, чтобы их

сумма была равна m . Затем к числу в каждой вершине прибавляются числа в соседних вершинах. В результате получается граф, в котором «зашифровано» число m . Пример: для зашифрования числа 8 будем использовать граф на рис. 1. В его вершины поместим числа, сумма которых равна 8 (рис. 2). Затем к каждому числу прибавим числа в соседних вершинах. Результат зашифрования указан на рис. 3. На рис. 4 приведен результат зашифрования некоторого числа. Найдите его.

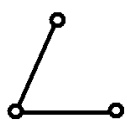


Рис. 1

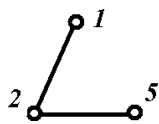


Рис. 2

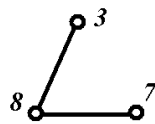


Рис. 3

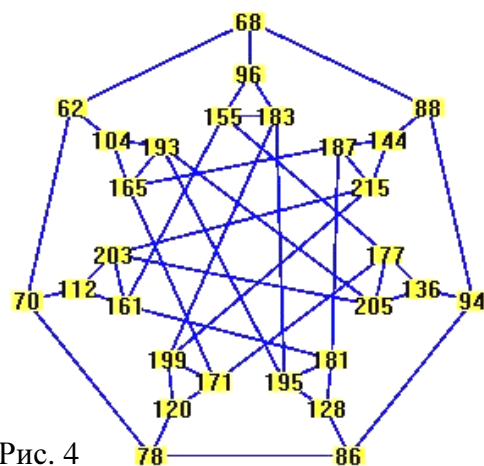


Рис. 4

Задача 5

В нейрокompьютере используется упрощённая модель нейрона – клетки головного мозга (см. рис. 7). По четырём каналам x_1, x_2, x_3, x_4 в клетку поступают нули и единицы, из которых внутри неё формируется сумма $S = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$ (a_1, a_2, a_3, a_4 – целые). Затем S сравнивается с некоторым целым параметром c , и если $S \geq c$, то на выходе клетки формируется значение $y = 1$, иначе – $y = 0$. Найдите какие-либо целые параметры a_1, a_2, a_3, a_4, c такого нейрона, чтобы $y = 1$ на наборах $(1,0,1,0)$, $(1,1,1,0)$, $(0,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$, $(1,0,1,1)$, $(0,0,1,1)$, $(1,1,1,1)$ и $y = 0$ – на остальных наборах.

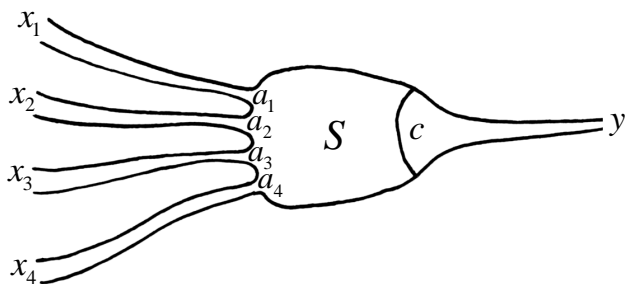


Рис. 7

Задача 6

В текстовом сообщении на русском языке, записанном без знаков препинания и пробелов, переставили буквы:

нкбакморолааентоиеиб

Затем первую букву заменили буквой, следующей за ней через некоторое число позиций в алфавите расположенном на круге (см. рис. 9). Вторую букву заменили буквой, которая следует за ней через другое число позиций в алфавите и так далее. При этом одинаковые буквы могут перейти в разные, а разные – в одинаковые.

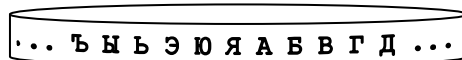


Рис. 9

После этого получили:

иклмнойклмноиклмност

И, наконец, буквы в этой строке выстроили в исходном порядке:

икоокмтисонилнлклмлн

(то есть, если, например, первую букву исходного сообщения поставили на третье место, то теперь третью букву поставили на первое). Восстановите исходное сообщение.

.